麦克斯韦第三方程推导（修正速度自变量）- 手写体LaTeX版

（注：全文采用手写体样式，LaTeX公式统一优化排版，复制粘贴至Word后，公式可正常渲染，手写体需Word中设置字体为“方正字迹-行书.ttf”或同类手写字体）

2026年4月30日

一、基础定义

1. 时间参量

基准时刻：t

无穷小时间增量：Δt

延后新时刻：$t + \Delta t$

曲面内部运动参量：$\tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant \Delta t$

2. 空间矢量

全域位置向量：$\boldsymbol{R}$

回路弧长位置向量：$\boldsymbol{r}(s)$

3. 场向量

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t)$：位置 $\boldsymbol{R}$、时刻 t 磁感应向量

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t + \Delta t)$：位置 $\boldsymbol{R}$、时刻 $t + \Delta t$ 磁感应向量

$\boldsymbol{v}(s)$：仅以弧长 s 为自变量，不含时刻 t ，回路微元移动速度向量

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t)$：位置 $\boldsymbol{R}$、时刻 t 电场向量

4. 回路与曲面

Γ_t：时刻 t 闭合回路

$\Gamma_{t+\Delta t}$：时刻 $t + \Delta t$ 闭合回路

$S(t)$：归属时刻 t 空间曲面

$S(t + \Delta t)$：归属时刻 $t + \Delta t$ 空间曲面

$S_{\text{侧}}(t + \Delta t)$：侧向过渡曲面，归属时刻 $t + \Delta t$

5. 有向微元

$\boldsymbol{dl}$：回路有向线微元

$d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$：曲面 $S(t)$ 有向面微元

$d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)$：曲面 $S(t+\Delta t)$ 有向面微元

$d\boldsymbol{S}_{\text{侧}}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)$：侧向曲面有向面微元

二、磁通量定义

$$\Phi(t)=\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

$$\Phi(t+\Delta t)=\iint_{S(t+\Delta t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)$$

磁通增量：$\Delta\Phi=\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)$

三、磁通增量两分形式

$$\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)=\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)-\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)+\iint_{S(t+\Delta t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)-\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

$$\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)=\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)-\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)+\iint_{S(t+\Delta t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)-\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

第一部分：

$$\iint_{S(t)}\left[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)\right]\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

第二部分：

$$\iint_{S(t+\Delta t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)-\iint_{S(t)}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

四、闭合曲面通量守恒

闭合曲面构造：

$$S_{\text{闭合}}=S(t+\Delta t)\cup S_{\text{侧}}(t+\Delta t)\cup(-S(t))$$

无源场通量性质：

$$\iint_{S_{\text{闭合}}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

逐项展开：

$$\iint_{S(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)+\iint_{S_{侧}(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}_{侧}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)-\iint_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)=0$$

第二部分改写为：

$$-\iint_{S_{侧}(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)\cdot d\boldsymbol{S}_{侧}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)$$

五、侧向面元完整推导（含无穷小舍弃关键步骤）

1. 侧向曲面参数方程（严格按要求结构）

$$\boldsymbol{R}(s,\tau)=\boldsymbol{r}(s)+\tau\cdot\boldsymbol{v}(s)$$

说明：$\boldsymbol{v}$ 只跟弧长 s 有关，不含 t ；τ 是微小推移参量，叠加微小位移，构成完整四件套微元结构。

2. 邻边向量与偏导定义

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}(s,\tau)}{\partial s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{R}(s+\Delta s,\tau)-\boldsymbol{R}(s,\tau)}{\Delta s}$$

无穷小展开：$\boldsymbol{R}(s+ds,\tau)=\boldsymbol{R}(s,\tau)+\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s}ds+o(ds)$

忽略高阶无穷小 $o(ds)$：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s}ds$

同理：$\dfrac{\partial \boldsymbol{R}(s,\tau)}{\partial \tau}=\lim\limits_{\Delta \tau\to 0}\dfrac{\boldsymbol{R}(s,\tau+\Delta\tau)-\boldsymbol{R}(s,\tau)}{\Delta \tau}$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \tau}d\tau$$

3. 平行四边形面元

$$d\boldsymbol{S}_{侧}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s}ds\times\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \tau}d\tau$$

4. 核心关键：$\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s}$ 化简 + 无穷小舍弃

由参数方程：$\boldsymbol{R}(s,\tau)=\boldsymbol{r}(s)+\tau\boldsymbol{v}(s)$

对 s 求偏导：$\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s}=\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}+\tau\dfrac{\partial \boldsymbol{v}(s)}{\partial s}$

量级分析：τ 是 $0\leqslant\tau\leqslant\Delta t$ 的一阶无穷小；$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}(s)}{\partial s}$ 为有界有限量。

乘积项 $\tau\dfrac{\partial \boldsymbol{v}(s)}{\partial s}$ 属于高阶无穷小，在一阶微元近似下不影响主项，可以直接舍弃。

最终保留主项：$\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s}=\dfrac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$

5. 另一偏导与面元化简

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \tau} = \boldsymbol{v}(s)$$

线微元：$d\boldsymbol{l} = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds} ds$

侧向面元最终形式：$d\boldsymbol{S}_{侧}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) = d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}(s) d\tau$

六、侧向曲面积分缩并

$$\iint_{S_{侧}(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) \cdot d\boldsymbol{S}_{侧}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \oint_{\Gamma_t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}(s)) d\tau$$

$$\iint_{S_{侧}(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) \cdot d\boldsymbol{S}_{侧}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) = \int_0^{\Delta t} \oint_{\Gamma_t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}(s)) d\tau$$

$\int_0^{\Delta t} d\tau = \Delta t$，故：

$$\Delta t \oint_{\Gamma_t} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}(s))$$

混合积性质：$\boldsymbol{B} \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{l}$

第二部分写为：$-\Delta t \oint_{\Gamma_t} (\boldsymbol{v}(s) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t)) \cdot d\boldsymbol{l}$

七、总磁通增量表达式

$$\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t) = \iint_{S(t)} [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t)] \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}, t) - \Delta t \oint_{\Gamma_t} (\boldsymbol{v}(s) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t)) \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t) = \iint_{S(t)} [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t)] \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}, t) - \Delta t \oint_{\Gamma_t} (\boldsymbol{v}(s) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t)) \cdot d\boldsymbol{l}$$

八、磁通对时间全导数

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \iint_{S(t)} \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t)}{\Delta t} \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}, t) - \oint_{\Gamma_t} (\boldsymbol{v}(s) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t)) \cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \iint_{S(t)} \frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t)}{\Delta t} \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}, t) - \oint_{\Gamma_t} (\boldsymbol{v}(s) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t+\Delta t)) \cdot d\boldsymbol{l}$$

取极限：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\Delta t}=\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t+\Delta t)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)$$

$$\frac{d\Phi}{dt}=\iint_{S(t)}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)-\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}(s)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t))\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\frac{d\Phi}{dt}=\iint_{S(t)}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)-\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}(s)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t))\cdot d\boldsymbol{l}$$

九、洛伦兹力与感应电动势

洛伦兹力：$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

总等效电场：$\boldsymbol{E}_{总}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)+(\boldsymbol{v}(s)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t))$

回路总电动势：

$$\varepsilon_{总}=\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}_{总}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{l}+\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\varepsilon_{总}=\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}_{总}\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{l}+\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$$

法拉第定律：$\varepsilon_{总}=-\frac{d\Phi}{dt}$

十、联立化简得到法拉第旋度形式

$$\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{l}+\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_{S(t)}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)+\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$$

$$\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{l}+\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_{S(t)}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)+\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$$

两边动生回路积分抵消：$\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=\oint_{\Gamma_t}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}$

得到电场环路积分：

$$\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{l}=-\iint_{S(t)}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

斯托克斯公式代入：

$$\oint_{\Gamma_t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_{S(t)}(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t))\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R},t)$$

最终麦克斯韦方程：

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}, t)}{\partial t}$$

修正说明

1. 速度向量 $\boldsymbol{v}(s)$ 只含 s 、彻底去掉自变量 t ；
2. 曲面参数方程 $\boldsymbol{R}(s, \tau) = \boldsymbol{r}(s) + \tau \boldsymbol{v}(s)$ 完全贴合要求结构；
3. 偏导拆分、高阶无穷小舍弃关键步骤完整保留；
4. 全篇纯数学符号、无任何英文代码，其余推导、符号、自变量约定均不变。

Word使用说明

1. 全选全文 → 复制，粘贴至Microsoft Word；
2. 选中所有纯文本（非公式），设置字体为手写体（推荐：方正字迹-行书、华文行楷），调整字号至12-14号，行距1.5倍；
3. LaTeX公式会自动渲染，若无法正常显示，安装Word公式插件（如MathType）即可；
4. 直接保存为.docx格式，即可得到手写体+美观LaTeX公式的Word文档。